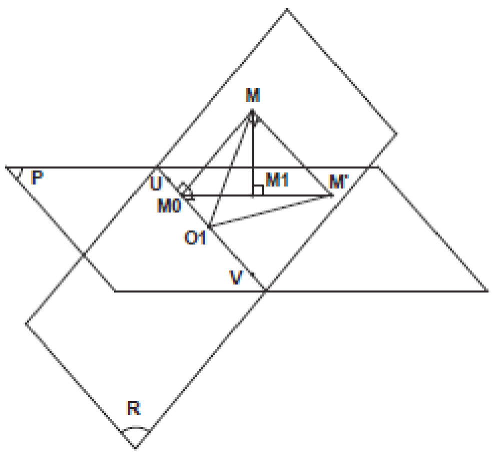
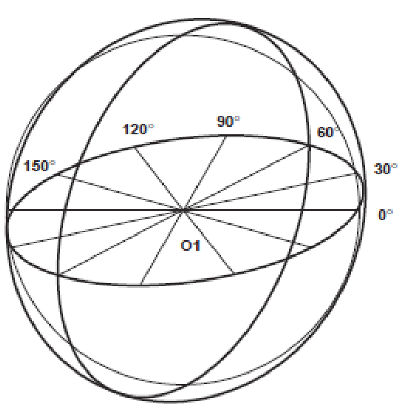
## Contour apparent du dessin d'une sphère en PC

On veut représenter en PC le contour apparent Σ de la sphère. C'est à dire, pour un observateur situé suffisamment loin de la sphère (par rapport à son rayon) et regardant suivant la direction de la projection, le grand cercle qui sépare la partie visible de la sphère de la partie cachée. Σ est donc le grand cercle dont le plan R est perpendiculaire à la direction Δ de la fuyante.(*Pour s'en convaincre, observer l'ombre d'un ballon au soleil, qui n'est autre que le dessin en PC du contour apparent de la sphère.*) Pour dessiner l'ellipse Σ' image de Σ par la projection p, commençons par construire son grand axe. Ce qui revient à chercher le diamètre du cercle qui a un projeté de longueur maximale.




On peut toujours supposer que les plans P et R sont sécants (car sinon Δ serait perpendiculaire au plan frontal P et le contour apparent de la sphère serait dans ce cas le cercle frontal).Quitte à remplacer le plan P par un plan parallèle, on peut même supposer qu'il coupe le plan R suivant un diamètre [UV] de Σ. Soit M un point du cercle Σ , M' son image par la projection p, $M_0$ et $M_1$ les projetés orthogonaux de M respectivement sur la droite (UV) et sur le plan P, remarquons que les points $M_0$, $M_1$ et M' sont alignés (en effet, en vertu du théorème des trois perpendiculaires la droite $(M_0M_1)$ (resp. $(M_0M')$) est perpendiculaire à (UV) en$M_0$). Comme :$O_1M' = \sqrt{O_1M^2 + MM'^2} = \sqrt{1 + MM_0{}^2\tan^2(\theta)}$ , il en résulte que $O_1M'$ est maximale ssi c'est le cas de $MM_0$. Or, la longueur $MM_0$ est maximale ssi les droites $(O_1M)$ et (UV) sont perpendiculaires, ou ce qui revient au même ssi le point M appartient au plan $R_1$ passant par $O_1$ et parallèle aux droites (OJ) et Δ. Remarquons que dans ce cas les points $M_0$ et $O_1$ sont confondus, on en déduit d'une part que la droite$(O_1M')$ est une fuyante et d'autre part que $MM_0 = O_1M = 1$, d'où $O_1M' = \dfrac{1}{\cos(\theta)}$.

Finalement, c'est le diamètre [wx] du cercle Σ,perpendiculaire à (UV) qui se projette suivant le grand axe [wx] de l'ellipse Σ' (w et x étant les points d'intersection du cercle, de centre $O_1$ et de rayon $\dfrac{1}{\cos(\theta)} = \delta(I, Red)$, avec la droite $(O_1J_1)$.Par ailleurs, le petit axe [uv] de Σ' n'est autre que le projeté de [UV] (diamètre de Σ perpendiculaire à [WX] *(En effet, les axes d'une ellipse sont des diamètres conjugués).* Or le segment [UV] se projette en vraie grandeur, puisque la droite (UV) est parallèle au plan frontal. Le cercle de centre $O_1$ passant par $I_1$ coupe donc la perpendiculaire à (wx) issue de $O_1$ en u et v. La construction de Σ en résulte.




Remarquons pour finir, que tout grand cercle $\Sigma_1$ autre que Σ est tangent intérieurement à Σ (les points de contact étant les extrémités du diamètre de $\Sigma_1$ porté par le plan R), ce qui assure que l'ellipse $\Sigma_1$', image de Σ par la projection p, sera tangent intérieurement à l'ellipse Σ' (les points de contacts étant, évidemment, les sommets portés par le grand axe de $\Sigma_1$'). On en déduit que le projeté d'un diamètre d'un grand cercle autre que Σ (resp.du grand cercle Σ) est de longueur maximale ssi il est porté par le plan R (resp. $R_1$).